Paradoxa der Stochastik – unglaublich!

Florian Borges, Traunstein
Illustrationen von Florian Borges

Der Begriff *Paradoxon* leitet sich aus dem Griechischen ab: *para* bedeutet entgegen, *doxa* heißt Erwartung. Ein Paradoxon ist also ein Sachverhalt, der ein unerwartetes Ergebnis zeigt. Dabei besteht die (enttäuschte) Erwartung etwa aus Erfahrungen, Beobachtungen, Wissen oder bestimmten Vorüberlegungen. Die Auflösung eines jeden Paradoxons sorgt für einen persönlichen Lerneffekt sowie im Großen für die Weiterentwicklung der Wissenschaft. Die hier ausgewählten Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung eignen sich besonders als motivierende Denkanstöße für Oberstufenschülerinnen und -schüler und vertiefen deren stochastisches Grundwissen in voller Breite.

Paradoxa der Stochastik – unglaublich!

Florian Borges, Traunstein
Illustrationen von Florian Borges

Die Schüler lernen:

- wachsam und kritisch auf scheinbar widersprüchliche Ergebnisse zu reagieren, deren Verblüffungseffekt bei vielen Paradoxa den Forschergeist und Ehrgeiz wecken.
- Vorsicht walten zu lassen bei scheinbar selbstverständlicher Transitivität.
- den Erwartungs- oder Mittelwert als oft, aber nicht immer hilfreiches Mittel der Wahl zu sehen.
- „offensichtliche" Gleichverteilung ggf. nochmal kritisch zu prüfen.
- Zusatzinformationen in Hinblick auf ihren Mehrwert einzustufen.
- Bezugsgrößen bei Bedarf im Auge zu behalten.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Simpson-Paradoxon	M1	Ab
Efrons nicht transitive Würfel	M2	Ab
Bridge-Paradoxon	M3	Ab
Geburtstags-Paradoxon	M4	Ab
Paradoxon der zwei Umschläge	M5	Ab
Ziegenparadoxon	M6	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M7	LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: stochastische Oberstufenkenntnisse (z. B. Laplace-Verteilung, hypergeometrische Verteilung, Binomialkoeffizienten, Erwartungswert, Mittelwert, Median) im Einsatz gegen trügerische Scheinwahrheiten

Medien: Tabellenkalkulation

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise zu Beitragstitel

Ablauf der Unterrichtseinheit

Beginnen Sie in Kleingruppen mit dem **Simpson-Paradoxon (M 1)** und wiederholen Sie an dieser Stelle Grundwissen über Laplace-Verteilungen. Nach dieser ersten Überraschung folgen die nicht transitiven **Würfel von Efron (M 2)** mit der Erkenntnis, dass der Erwartungswert nicht alle wesentlichen Informationen enthält – einige Aufgaben erhöhen den „Frust". Zur Wiederholung der hypergeometrischen Verteilung und des Binomialkoeffizienten drängt sich das **Bridge-Paradoxon (M 3)** mit dem nächsten Spaziergang auf „logischem Glatteis" auf. Eher aus Bekanntheitsgründen darf das **Geburtstagsparadoxon (M 4)** nicht fehlen, dessen Skepsisfaktor hauptsächlich in der geringen Erfahrung mit den rasch wachsenden Fakultäten liegt und keinen Denkfehler provoziert. Die Aufgabe wiederholt – ein wenig getarnt – die gesamte Situation eins zu eins. Beim St. Petersburger **Paradoxon der beiden Umschläge (M 5)** klären die Jugendlichen hingegen einen Denkfehler auf. Das anspruchsvolle (aber mit dem Hinweis gut aufzulösende) **Ziegenproblem (M 6)** war einst sehr präsent in der Weltpresse – überraschend ist hier der „Mehrwert" einer späten Zusatzinformation. Im **Abschlusstest (M 7)** folgen zur Abrundung weitere Überraschungen, die an dieser Stelle aber die längst „misstrauischen" Schülerinnen und Schüler nicht aus der Ruhe bringen werden.

Lehrplanbezug

Die Schülerinnen und Schüler lernen

- einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff kennen und präzisieren so ihre Vorstellungen von bereits bekannten Begriffen und Vorgehensweisen,
- formal mit Ereignissen umzugehen,
- den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen,
- den Binomialkoeffizienten kennen und die Binomialverteilung vertraut anzuwenden,
- die Begriffe *Zufallsvariable*, *Erwartungswert*, *Bernoulli-Experiment* und *Standardabweichung* im Kontext souverän anzuwenden,
- mit einer Tabellenkalkulation zu arbeiten
- den einseitigen Signifikanztest kennen.

Vgl. https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html (aufgerufen am 18.06.2021)

M 1 Simpsons Paradoxon

Eine pharmazeutische Firma testet zwei ihrer Schmerzmittel, Alpha und Beta: Beim Medikament Alpha stellen 180 der 240 getesteten Frauen eine Wirkung fest, bei Mittel Beta spüren 340 der 510 getesteten Frauen eine Schmerzlinderung. Beim Präparat Alpha bestätigen 240 der 720 getesteten Männer die Wirksamkeit, bei Mittel Beta sind es 40 von 160 Testmännern.

– Welches der beiden Mittel ist bei Frauen wirksamer?

  Alpha: $\frac{180}{240} = 75\ \%$ Beta: $\frac{340}{510} \approx 66{,}7\ \%$ **Alpha ist besser für Frauen**!

– Welches der beiden Mittel ist bei Männern wirksamer?

  Alpha: $\frac{240}{720} \approx 33{,}3\ \%$ Beta: $\frac{40}{160} = 25\ \%$ **Alpha ist besser für Männer**!

– Welches der beiden Mittel ist – unabhängig vom Geschlecht – wirksamer?

  Alpha: $\frac{420}{960} = 43{,}75\ \%$ Beta: $\frac{380}{670} \approx 56{,}7\ \%$ **Beta ist besser für alle**!?

Was ist wirklich besser? – Erklärung für das scheinbar widersinnige Ergebnis:

Die Einzelergebnisse gehen unterschiedlich gewichtet ins Gesamtergebnis ein.

Aufgabe: Verlängerung auslaufender Abos einer Zeitschrift

Interpretieren Sie die Tabelle aus Sicht des Abo-Vertreters / aus Sicht seiner Vorgesetzten:

	Kategorie des laufenden Abonnements					
Monat	**K_1**	**K_2**	**K_3**	**K_4**	**K_5**	**Summe**
Januar						
Ausl. Abos	3594	18 364	20 862	2986	149	45 955
Verläng.	2918	14 488	4343	1783	13	23 545
Anteil	**0,812**	**0,789**	**0,208**	**0,597**	**0,087**	**0,512**
Februar						
Ausl. Abos	884	5140	864	2224	45	9157
Verläng.	704	3907	122	1134	2	5869
Anteil	**0,796**	**0,760**	**0,141**	**0,510**	**0,044**	**0,641**

Hinweis: „Anteil“ ist das Verhältnis der verlängerten Abos und der auslaufenden.

M 2 Efrons nicht transitive Würfel

Die Würfel

- **A** (mit den Zahlen 1, 1, 1, 5, 5, 5) und
- **C** (mit 3, 3, 3, 3, 3, 3)

liefern beide durchschnittlich den Würfelwert 3.

Der Würfel

B (0, 0, 4, 4, 4, 4) bringt durchschnittlich $\frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$,

der Würfel

D (2, 2, 2, 2, 6, 6) dagegen sogar $\frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$.

Jedoch gewinnen im paarweisen Vergleich jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ Würfel

- A gegen B,
- B gegen C,
- C gegen D und
- schließlich auch D gegen A!

Warum kann man sich hier nicht auf den Erwartungswert verlassen?

Aufgaben

1. Die Kinobesucher bei „Teletubbies – der Film“ waren durchschnittlich ca. 40 Jahre alt – genauer: etwa 70-jährige Omas bzw. Opas mit je einem Enkelkind (etwa 10 Jahre alt).
   Würde die Verwendung des Medians die Aussagekraft hier im Vergleich zum Mittelwert erhöhen?
2. Bei der Lotterie A gewinnt man mit 20 % Wahrscheinlichkeit 1 € und mit 80 % Wahrscheinlichkeit 3 €, also durchschnittlich 2,6 €.
   Lotterie B zahlt mit 80 % Wahrscheinlichkeit 2 € aus und in 20 % der Fälle 4 €, durchschnittlich sind das 2,4 €.
   Welche Lotterie ist „besser“? Versuchen Sie für jede der beiden Varianten eine positive Argumentation zu finden und hinterfragen Sie den Sinn des Erwartungswertes in diesem Beispiel.