KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Thematische Bereiche:	Auswertung von Messdaten, Modellierung, lineare Funktion, logarithmische Auftragung, Exponentialfunktion, Ableitung, Standardabweichung, Schwerpunkt, Korrelationskoeffizient, Potenzfunktion

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen bereits Differentialrechnung, können eigenständig die Ableitung einer Funktion berechnen und kennen das Verfahren zur Bestimmung von Extremwerten. Das Wissen über die Aufzeichnung und Bearbeitung von Messdaten und die Darstellung in Tabellen und Diagrammen wird hier vorausgesetzt. Die Jugendlichen haben bereits Erfahrung im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen insbesondere mit dem Erstellen von Diagrammen aus Tabellendaten.
Auch das Wissen, wie man Informationen aus dem Internet herunterladen kann, wird hier vorausgesetzt.
Sollte Differentialrechnung noch nicht zum Vorwissen gehören, so muss auf die Herleitung in **M 2** verzichtet und die gefundenen Formeln müssen ohne Begründung als „gegeben“ eingeführt werden. Die Minimierung der Fehlerquadratsumme als Grundkonzept der Linearregression kann dennoch benannt werden.

Didaktisch-methodische Hinweise

Anhand eines einfachen Beispiels wird in **M 1** die Regression „grafisch“ durchgeführt. Durch Vergleich der Ergebnisse, die die Schülerinnen und Schüler in der Klasse erhalten, soll gezeigt werden, dass es ein Optimum für die Regressionsgerade gibt.
In **M 2** und **M 3** geht es dann darum, die Optimierung mathematisch korrekt durch eine Extremwertsuche durchzuführen. Voraussetzung dafür ist, zumindest um die Herleitung in **M 2** zu verstehen, dass Ableitungen und Extremwertbestimmung den Lernenden bekannt sind. Wenn das nicht der Fall ist, müssen Sie die Herleitung in **M 2** zumindest teilweise überspringen. Deren Ergebnisse sind in diesem Fall eine Vorgabe zur weiteren Bearbeitung

des Themas. Was Sie aber auch ohne Herleitung darstellen können, ist das grundlegende Prinzip, die Fehlerquadratsumme zu minimieren.
Danach geht es um die Beurteilung der Aussagekraft einer Regressionsgerade und um die zentrale Frage, ob ein linearer Zusammenhang besteht. Die Jugendlichen lernen hier Kennzahlen für die „Qualität" der Regression kennen.
Es gibt einige nichtlineare Zusammenhänge, die auch auf eine lineare Beziehung zurückgeführt werden können. Beispiele dafür zeigt **M 7**. Die Beispiele könnten aus dem Physikunterricht bekannt sein und sind teilweise auch als Schülerversuch geeignet. Das Pendel ist ein so einfacher Versuch. Es bietet sich an, dass die Lernenden diesen wirklich durchführen. Wenn Ihnen genügend Zeit und das entsprechende Material zur Verfügung steht, könnten Sie die Schülerinnen und Schüler auch selbst Daten zu den elektronischen Bauteilen erheben lassen, die sie dann auswerten. Wenn nicht, greifen Sie auf die bei den Aufgaben wiedergegebenen Messdaten zurück.
Zum Schluss geht es in **M 8** noch darum, wo die Grenzen der möglichen Vorhersagen liegen. Dazu betrachten die Lernenden verschiedene Datenreihen und bestimmen für deren Verlauf Regressionsgeraden, die sie anschließend interpretieren.

Weiterführende Medien

Internetadressen

- Shortlink: https://raabe.click/BVZ
  Originallink: https://www.destatis.de/DE/Presse/Pressemitteilungen/2023/01/PD23_026_124.html
  Statistische Daten zum Bevölkerungsdatum; genutzt in M 8, Aufgabe 1
- Shortlink: https://raabe.click/Komunis
  Originallink: https://www.domino1.stuttgart.de/web/komunis/komunissde.nsf
  Informationssystem des Statistischen Amts, Stuttgart, genutzt in M 8, Aufgabe 2
- Shortlink: https://raabe.click/Komunisxlsx
  Originallink: https://www.domino1.stuttgart.de/web/komunis/komunissde.nsf/fc223e09e4cb691ac125723c003bfb31/7ba25c0b83943ab1c12584d30047742e/$FILE/402_.xlsx
  Download des Excel-Files vom Statistischen Amt mit Klima- und Wetterdaten, die in M 8, Aufgabe 2 genutzt werden.

Alle Links wurden zuletzt am 10.04.2024 abgerufen.

Auf einen Blick

Lineare Regression – Darstellung von Zusammenhängen

M 1	Datenanalyse
M 2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate
M 3	Lineare Regression „von Hand"
M 4	Standardabweichung der Messwerte
M 5	Schwerpunkt
M 6	Korrelationskoeffizient
M 7	Nichtlineare Zusammenhänge
M 8	Kann man Vorhersagen treffen?
Benötigt	☐ Internet

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgabe	Alternative	

Datenanalyse

M 1

Oft versucht man für Fragestellungen aus der Technik, Physik, Chemie und Biologie, aber auch aus anderen Wissenschaften mathematische Modelle zu entwickeln, um einerseits die Vorgänge zu verstehen, andererseits aber auch Vorhersagen machen zu können. Die Modelle können einfache Funktionen sein, aber auch durch komplexe Algorithmen repräsentiert werden. Wir wollen uns hier einem einfacheren Modell widmen, der Darstellung von linearen Zusammenhängen mithilfe einer Regressionsgeraden.

Beispiel:

Ein Hersteller von Süßwaren will eine neuartige Schokolade auf den Markt bringen. Um zu ermitteln, welchen Preis die Kundschaft zu zahlen bereit ist vereinbart er mit einer Handelskette, seine neue Schokolade in mehreren gleich großen Filialen zu verschiedenen Preisen anzubieten. Aus den Daten kann er dann die Nachfragefunktion ermitteln, die die zu erwartenden Verkaufszahlen als Funktion des Verkaufspreises darstellt.
Nach vier Wochen erhält der Hersteller folgende Daten:

Filiale	Preis in €	Anzahl verkauft
Filiale 1	0,80	880
Filiale 2	0,90	865
Filiale 3	1,00	791
Filiale 4	1,10	737
Filiale 5	1,20	712

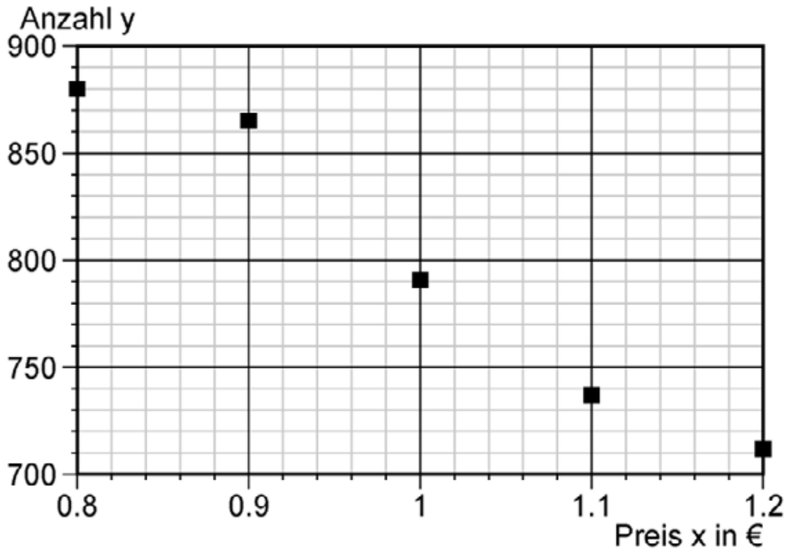

Abb. 1 Verkaufte Stückzahlen Q in Abhängigkeit des Verkaufspreises P

y sei hier die Anzahl verkaufter Schokoladen. y ist eine dimensionslose Zahl.
x ist der Preis mit der Einheit Euro (€).

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie in die Abb. 1 eine Gerade g ein, die „zwischen" den dort eingezeichneten Punkten $(x_i \,|\, y_i)$ verläuft.
Bestimmen Sie bei 0,8 € und 1,2 € grafisch die Funktionswerte g(0,8) und g(1,2) Ihrer Gerade und ermitteln Sie aus diesen zwei Punkten die Geradengleichung $y = m \cdot x + b$. Tragen Sie die gefundenen Werte für Steigung und den y-Achsenabschnitt in die Kopfzeile der Tabelle auf der nächsten Seite ein.

Berechnen Sie dann aus der Geradengleichung noch g(0,9), g(1,0) und g(1,1). Tragen Sie die beiden grafisch ermittelten Funktionswerte und die drei zusätzlich berechneten ebenso in die Tabelle ein.
Berechnen Sie für die Verkaufszahlen y_i der fünf Filialen die Differenz zum entsprechenden Funktionswert $g(x_i)$ Ihrer Gerade sowie die Quadrate dieser Differenzen $(y_i - g(x_i))^2$.
Tragen Sie auch dies in die Tabelle ein. Addieren Sie schließlich die Differenzen-Quadrate.

Hilfe zum Ermitteln der Geradengleichung:

Korrelationskoeffizient

M 6

Ein anderer gebräuchlicher Wert, um die Güte der Regressionsgeraden zu beschreiben, ist der Pearson'sche Korrelationskoeffizient[1]. Bei striktem linearem Zusammenhang ist er 1 oder -1. Bei völlig zufällig verteilten Messpunkten ist er Null. Man benützt hierzu den Schwerpunkt $\left(\overline{x}\,|\,\overline{y}\right)$ der „Punktewolke" aus den Messdaten. Berechnet werden die Abstände der x- und y-Werte zum jeweiligen Mittelwert. Der Korrelationskoeffizient R wird nach nebenstehender Formel berechnet.

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Liegen alle Punkte bei positiver Steigung auf der Regressionsgeraden, so ist R = 1. Liegen Sie bei negativer Steigung auf der Regressionsgeraden, so ist R = -1. Bei gänzlich nicht vorhandenem Zusammenhang zwischen x-Werten und y-Werten wird R = 0. Es wird auch gerne das Bestimmtheitsmaß R_2 angegeben. Es ist das Quadrat des Korrelationskoeffizienten. $0 \le R^2 \le 1$

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie manuell den Korrelationskoeffizient mit den Daten der Schokoladenverkäufe aus **M 1**.

i	x_i	y_i	$(x_i - \overline{x})$	$(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1	0,8	880					
2	0,9	865					
3	1,0	791					
4	1,1	737					
5	1,2	712					
Σ							

$\overline{x}$	$\overline{y}$

$\sqrt{}$		
Korrelationskoeffizient R		

1 Karl Pearson (1857–1936), britischer Mathematiker