Einzelstunden

Kombinatorik und Graphentheorie kreativ üben – Die Laplace-Maus im Gitterlabyrinth

Redaktion Mathematik

Machen Sie den Lernenden Lust auf Mathematik mit motivierenden und problemorientierten Aufgaben. Anhand des anschaulichen Beispiels einer Maus im Gitterlabyrinth fordern Sie die Lernenden heraus, ihr Vorwissen zu aktivieren und geeignete mathematische Modelle zu finden und kennenzulernen. Setzen Sie das Material zur Übung der Kombinatorik ein oder um einen ersten Einblick in die Graphentheorie zu geben. Sie können die *PowerPoint*-Präsentation nutzen, um im Plenum die Aufgaben zu besprechen und durch Ihren Unterricht zu leiten.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	8–11
Dauer:	1–2 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)
Inhalt:	Laplace-Experiment; Kombinatorik; Binomialkoeffizient; Graphentheorie; Wegzählverfahren
Zusatzmaterial:	*PowerPoint*-Präsentation

Auf einen Blick

Einstieg

Thema: **Vorwissen aktivieren und Motivation schaffen**

M 1 Die Maus im Gitterlabyrinth

Erarbeitung

Thema: **Graphentheorie und Wegzählverfahren kennenlernen**

M 2 Minimalwege im Koordinatengitter – Graphentheorie

Übung

Thema: **Überprüfung des Verständnisses und Einübung des Modells**

M 3 Die Maus im Gitterlabyrinth – Minimalwege über einen Knoten und Knoten als Störstelle

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 11.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit mit den folgenden Materialien:

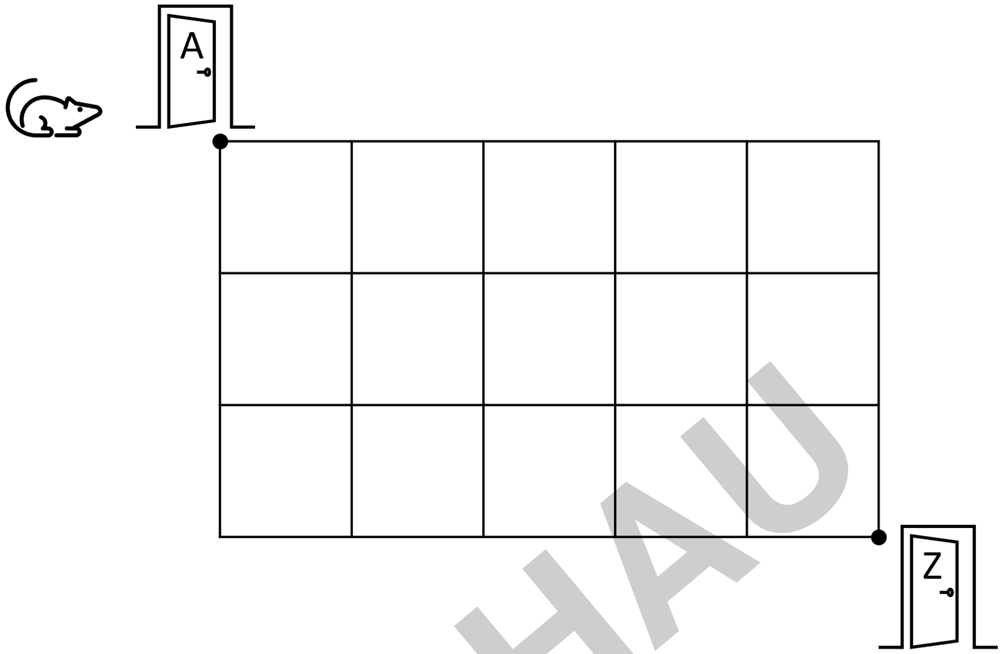
M 1 Die Maus im Gitterlabyrinth
M 2 Minimalwege im Koordinatengitter – Graphentheorie
M 3 Die Maus im Gitterlabyrinth – Minimalwege über einen Knoten und Knoten als Störstelle **Aufgabe 1–2**

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgaben	Alternative	Selbsteinschätzung

M 1 Einstieg: Die Maus im Gitterlabyrinth

Eine Maus durchläuft ein Gitterlabyrinth ausgehend vom Eingang A bis zum Ausgang Z. Das Gitterlabyrinth lässt sich wie folgt skizzieren, wobei die Linien die möglichen Wege darstellen:



Wir gehen davon aus, dass die Maus wahnsinnig intelligent ist und keinen Weg zurückgeht.
Das heißt, sie wählt den Weg minimaler Länge von A nach Z.
Wie viele unterschiedliche Wege könnte sie demnach wählen?

Aufgabe

a) **Überlegen** Sie sich, wie Sie diese Realsituation in einem mathematischen Modell beschreiben können. **Brainstormen** Sie hierzu, welche mathematischen Modelle Sie kennen, die zur Lösung der Fragestellung hilfreich sein könnten.

b) **Tauschen** Sie sich mit einer anderen Person über Ihre Brainstorming-Ergebnisse **aus.**

c) **Diskutieren** Sie zu zweit, welches Modell Ihnen am effizientesten erscheint, und **beantworten** Sie die Frage mithilfe des Modells.

Notizen:

Insgesamt müssten allerdings 8 Stufen, da 8 Teilstrecken von A nach Z gelaufen werden müssten, dargestellt werden. Es wird daher schnell ersichtlich, dass das Baumdiagramm zwar eine anschauliche Hilfe ist, dieses aber sehr groß werden würde und daher für diese Aufgabenstellung nicht praktikabel wäre.

Ein weiteres mathematisches Modell, was wir anwenden könnten, finden wir mithilfe der **Kombinatorik**. Von dort wissen wir:

> Es gibt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$) Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).

Mit unseren Vorüberlegungen, dass die Maus genau 3 Teilstrecken nach unten und 5 Teilstrecken nach rechts laufen muss, um von A nach Z zu kommen, kann man das Problem umformulieren zu: „Von 8 Teilstrecken wählt die Maus genau 3-mal nach unten." Es ergibt sich somit für n = 8 und k = 3 und eingesetzt in die Formel die Rechnung:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

Alternativ hätte man auch die Formulierung wählen können: „Von 8 Teilstrecken geht die Maus genau 5-mal nach rechts." Es ergibt sich somit für n = 8 und k = 5 und eingesetzt in die Formel die Rechnung:

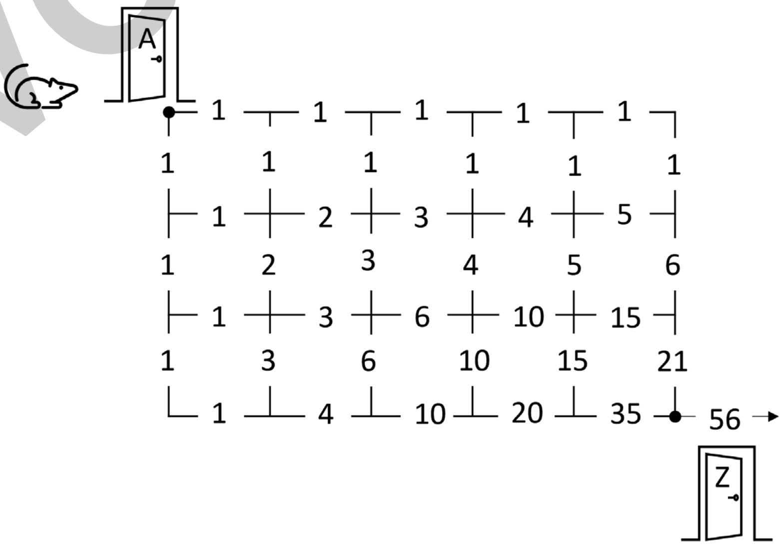
$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

Was zum gleichen Ergebnis führen würde.

Lösungen (M 2)

Aufgabe

Lösung mit dem Wegzählverfahren:



Das Zählverfahren bestätigt wie erwartet das bereits ermittelte Ergebnis aus **M 1**.

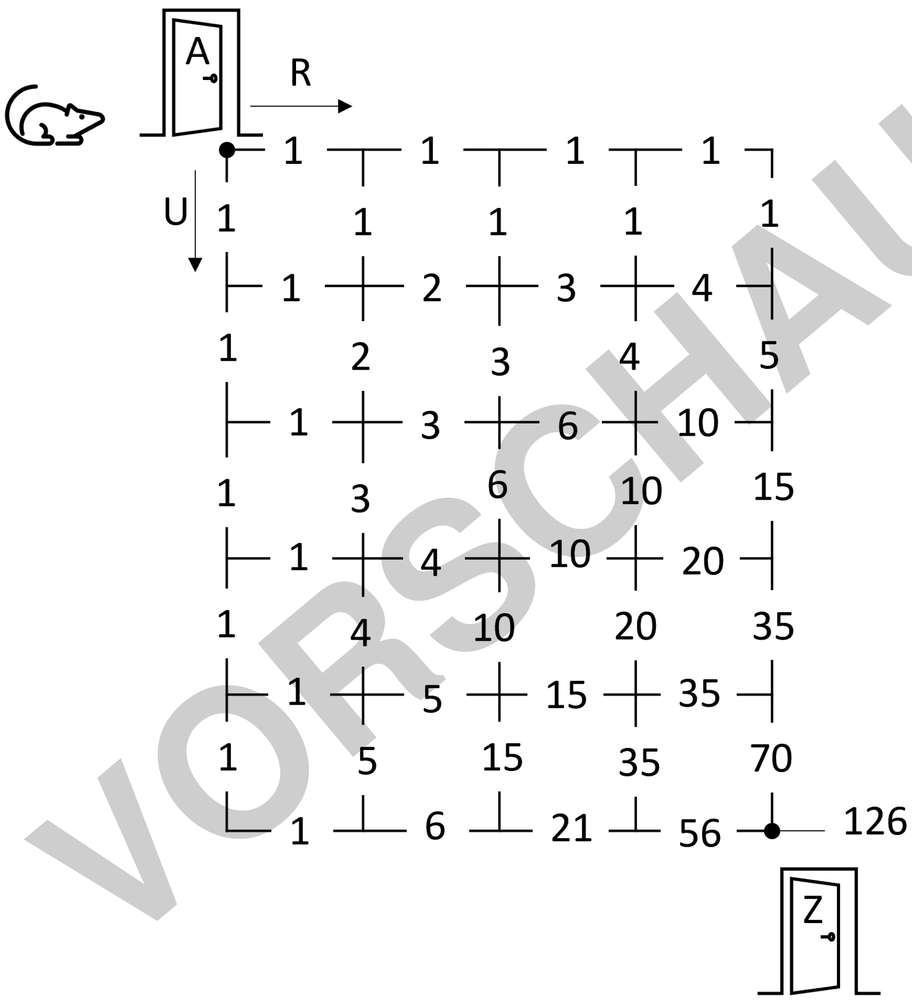
Lösungen (M 3)

Aufgabe 1

a) Anzahl der Wege (Minimalwege) im Gitterlabyrinth vom Start A zum Ziel Z:
Die angegebenen Pfeilrichtungen erlauben nur Wege minimaler Länge von A nach Z.
Jeder Weg besteht aus 4 Kantenlängen nach rechts und 5 Kantenlängen nach unten.
Die Anzahl der Wege beträgt folglich

$$\binom{4+5}{4}=\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!\cdot 5!}=126 \text{ bzw. } \binom{4+5}{5}=\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!\cdot 4!}=126$$

Dieses Ergebnis kann mit dem Wegezählverfahren bestätigt werden:



Ergebnis:
Die Maus hat die Auswahl zwischen 126 Wegen. Da kein Weg bevorzugt ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Wahl eines bestimmten Weges $\frac{1}{126}$.