

# I.D.69

## Geometrie

# Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit dem Höhensatz

Marc Eßer



© RAABE 2024

© colourbox

Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. In dieser Unterrichtseinheit beschäftigen sich die Lernenden anhand eines Tunnelkonstruktionsproblems mit dem Höhensatz des Euklids. Dabei wird das Problemlösen sowie das Beweisen in den Mittelpunkt des Kompetenzerwerbs gestellt. Eine hohe Aktivierung der Lernenden wird durch Differenzierung, Entdeckung und digitale Elemente erreicht.

### KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	9
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Höhensatz
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), kommunizieren (K6)

GeoGebra

## Auf einen Blick

Planung für 2 Stunden

### Einstieg

M 1 Problemstellung: Konstruktion eines Tunnels

### Erarbeitung

M 2 Geometrischer Beweis des Höhensatzes durch Legen

M 3 Algebraischer Beweis des Höhensatzes mithilfe des Satzes von Pythagoras








### Ergebnissicherung

M 4 Die Formulierung des Höhensatzes

### Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 10.

### Erklärung zu den Symbolen

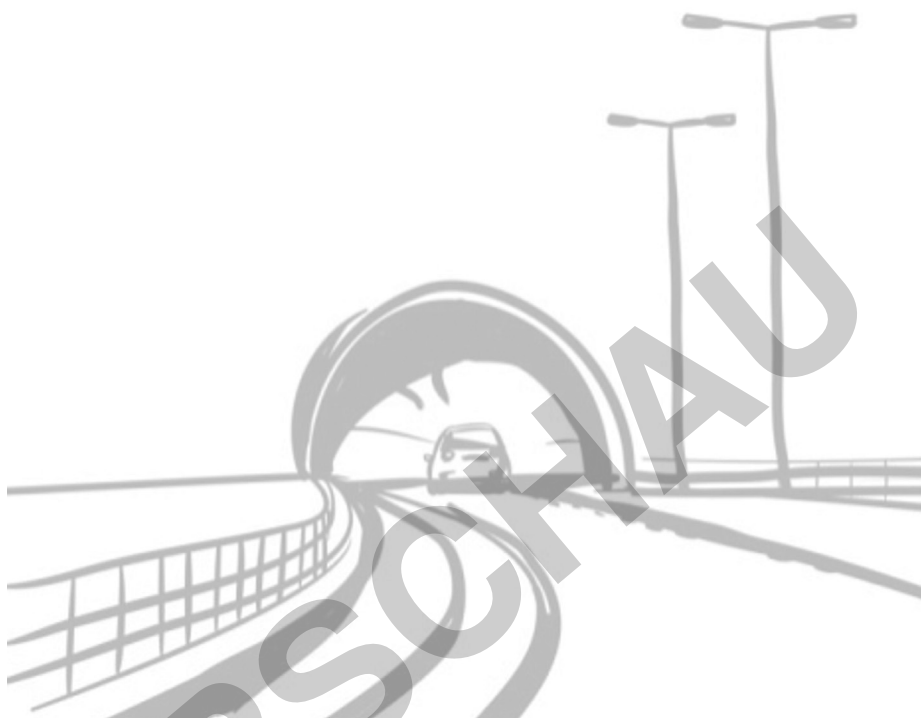
	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	einfaches Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	Zusatzaufgabe		Alternative		Download

## M 1

## Problemstellung: Konstruktion eines Tunnels

Stellt euch vor, ihr seid in einem Architekturbüro tätig und sollt einen Tunnel konstruieren, sodass Busse mit 4,20 m Höhe in den Tunnel fahren können. Am Rand soll jeweils 1 m Fluchtweg eingeplant werden. Der Tunnel soll halbkreisförmig sein. Wie breit muss dann die Fahrbahn sein?

Skizze des Tunnels



Verändert nach: A-Digit/DigitalVision Vectors

### Aufgaben 1

- Vervollständige** die Skizze mit den dir bekannten Informationen. Überlege dir dabei auch, welche mathematischen Formen, Sätze dir hier weiterhelfen könnten (bspw. Dreiecke, Rechte Winkel, ...).
- Vergleiche** deine Skizze mit der Skizze der Person, die neben dir sitzt.
- Besprecht** eure Skizzen gemeinsam in der Klasse.

### Aufgabe 2

- Beweise** den Höhensatz  $h^2 = p \cdot q$  entweder geometrisch (**M 2**) ODER durch das Sortieren der algebraischen Beweisschritte und mithilfe des Satzes von Pythagoras (**M 3**).
- Formuliere** den Höhensatz mithilfe von **M 4**.

### Aufgabe 3

Berechne nun mithilfe des Höhensatzes  $h^2 = p \cdot q$  die Breite der Straße.

### Aufgabe 4

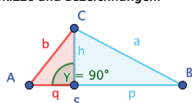
Beweise die andere Möglichkeit.



Die **digitalen** Lösungen in GeoGebra sehen folgendermaßen aus:

Der Schieberegler ist im ersten Applet auf eine  $90^\circ$ -Drehung einzustellen. Daraus ergibt sich die unten abgebildete Figur  $h^2$  (analog zum Beispiel aus Papier):

Skizze und Bezeichnungen:

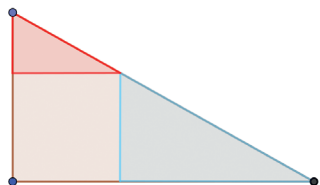


Das abgebildete Dreieck in der Skizze wird in ein größeres Dreieck verschoben.

Aufgabe:

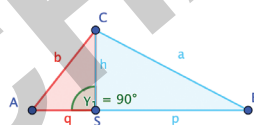
- Beschrifte die Seitenlänge des größeren Dreiecks. Übernimm dabei die Beschriftungen aus der Skizze. Mache dafür entweder einen Screenshot oder fertige eine eigene Skizze im Heft an.
- Über den Schieberegler wird das ursprüngliche Dreieck aus der Skizze, das rot und blau dargestellt ist, entlang der Höhe ausgeschnitten.

Verändere den Regler und lege das rote Dreieck so in das große Dreieck herein, dass du die freie Fläche beschreiben kannst. Wie lautet der Flächeninhalt der freien Fläche im großen Dreieck?



Das Schieben der beiden Dreiecksfiguren führt zur zweiten Figur (pq):

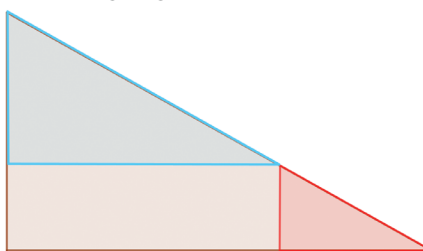
Skizze und Bezeichnungen:



Das abgebildete Dreieck in der Skizze soll in das große Dreieck verschoben werden. Dafür wurde das Dreieck aus der Skizze bereits entlang der Höhe zerschnitten. Das rote Dreieck wurde außerdem gedreht.

Aufgabe:

- Klicke mittig auf die farbigen Dreiecke und verschiebe sie in das große Dreieck, sodass eine andere Figur als die Figur in der vorherigen Aufgabe entsteht. Schiebe so, dass du die freie Fläche beschreiben kannst. Wie lautet der Flächeninhalt der freien Fläche im großen Dreieck? Fertige eine Skizze in deinem Heft an oder mache einen Screenshot deines Ergebnisses.
- Das große Dreieck aus der vorherigen Aufgabe, in das verschoben wurde, ist identisch mit dem großen Dreieck hier. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den freien Flächen aus der vorherigen Aufgabe und der freien Fläche hier? Halte deine Ergebnisse schriftlich fest.



Die zweite Frage in diesem Applet führt zum Vergleich der beiden digital gelegten Figuren:

