II.A.47

Analysis

Graphisches Ableiten – In Stationenarbeit Zusammenhänge erkunden

Nach einer Idee von Dr. Jürgen Leitz

© damircudic/E+

Bei der Kurvenuntersuchung liefern die drei Ableitungen einer Funktion Kriterien für notwendige und hinreichende Bedingungen zum Bestimmen markanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkt) und werden zur Verlaufsbestimmung des Graphen (Monotonie, Krümmungsverhalten) angewendet. Somit kann grob der Verlauf einer Funktion gezeichnet werden. Den Schwerpunkt dieser Unterrichtseinheit bildet das graphische Differenzieren. Lassen Sie Ihre Klasse Erkenntnisse sowohl im Plenum als auch in Einzelarbeit, Partnerarbeit und Gruppenarbeit erarbeiten und in Stationenarbeit vertieft üben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12
Dauer:	6 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)
Inhalt:	Ableitung, Ableitungsfunktion, Änderungsrate, Steigung, Funktionsgraph, Extrempunkte, Wendepunkt, Sattelpunkt, Nullstelle, Monotonie, Symmetrie, Tangente, Vorzeichenwechsel

Auf einen Blick

Planung für 6 Stunden

Einstieg

M 1	Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen

Erarbeitung

M 2	Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion f und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen f' und f''
M 3	Graphisches Ableiten – Mithilfe von Tangentensteigung
M 4	Graphisches Ableiten – Mithilfe von Steigungsbereichen

Übung/Stationenarbeit

M 5	Laufzettel zur Stationenarbeit
M 6	Station 1 – Graph mit einem Wendepunkt
M 7	Station 2 – Graph mit zwei Wendepunkten
M 8	Station 3 – Graph mit drei Wendepunkten
M 9	Station 4 – Graph mit Sattelpunkt
M 10	Tippkarten für das Stationenlernen

Rückbezug

M 11 (Ab)	Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen

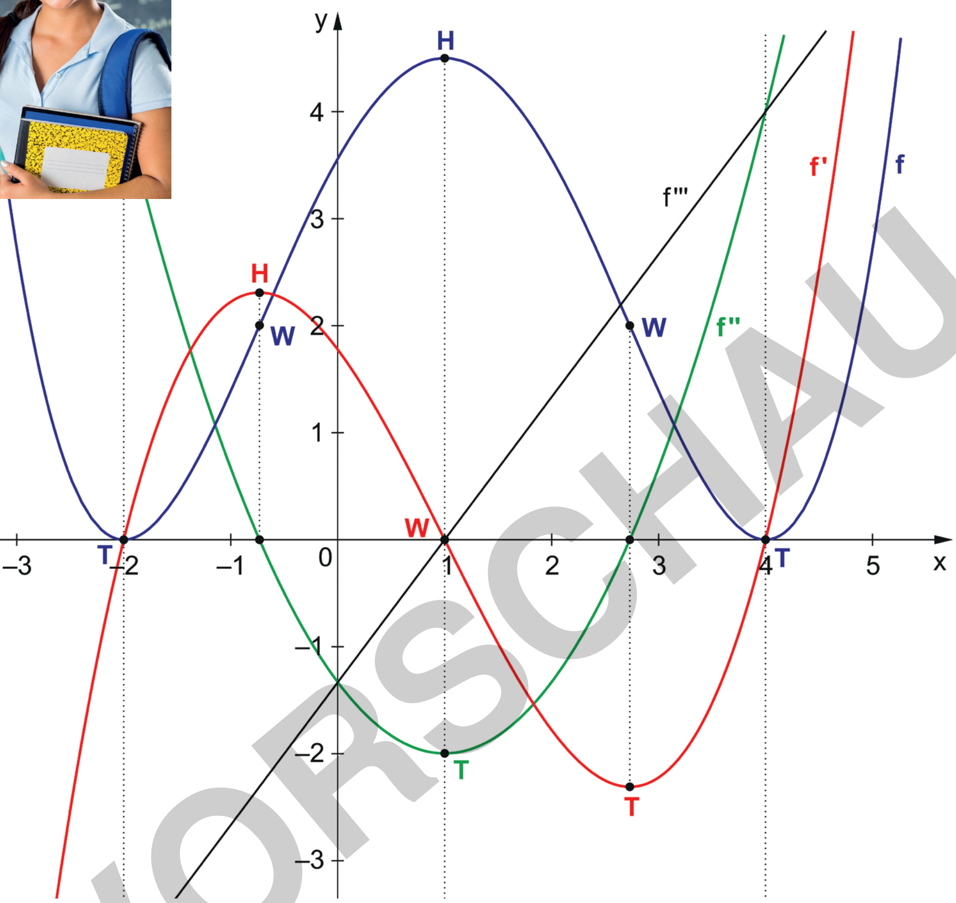
Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 28.

Einstieg: Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen M 1

Maya behauptet:

Ich kann vom Graphen einer Funktion auf das Aussehen des Graphen der Ableitungsfunktion schließen.



Aufgabe

a) **Lesen** Sie Mayas Behauptung.

b) **Betrachten** Sie die Graphen.

c) **Beurteilen** Sie, ob Maya mit ihrer Behauptung recht hat, und **erläutern** Sie Ihre Entscheidung.

Bildquelle: SDI Productions/E+

M 2 Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion f und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen f' und f''

Aufgabe 1

Ergänzen Sie folgenden Lückentext.

Die Steigungswerte (lokale ____________________rate) einer Funktion f werden durch den Graphen der ____________________________________ dargestellt.

Die _______________________ einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist gleich dem Wert der ___________________________________ an dieser Stelle.

In _________-, _________- und _______________________punkten ist die Tangente ______________________ und somit ist die Steigung __________.

In den Punkten mit der _____________________/kleinsten Steigung ändert sich das _____________________________verhalten des Ausgangsgraphen:

Übergang von einer _____________- in eine _____________kurve oder umgekehrt.

Diese Punkte werden deshalb auch _____________punkte genannt.

Ein (lokaler) Hochpunkt/Tiefpunkt der Ausgangsfunktion f ist eine ____________stelle der Ableitungsfunktion f, und ist somit ein Schnittpunkt mit der _____-Achse.

Notwendige Bedingung für einen Hoch-/Tiefpunkt ist, dass die erste Ableitung an dieser Stelle den Wert __________ hat.

Neben der notwendigen Bedingung muss noch die _____________________ Bedingung für einen Extremwert an der Stelle x_E erfüllt sein:

1. Wenn $f''(x_E) <$ ___ ist, dann liegt ein Hochpunkt vor.
2. Wenn $f''(x_E) >$ ___ ist, dann liegt ein Tiefpunkt vor.

Ein Wendepunkt der Ausgangsfunktion entspricht einem ________________________ der Ableitungsfunktion.

Ist der Graph der Ausgangsfunktion _____________________________________, dann ist der Graph der Ableitungsfunktion punktsymmetrisch.

Wenn der Graph der Ableitungsfunktion achsensymmetrisch ist, dann ist der Graph der Ausgangsfunktion ____________________________________.

Station 1, Aufgabe 2: Tippkarte
a) Was für ein besonderer Punkt liegt an der Stelle $x = -1$ vor? Welche Bedingungen gelten für diese Punkte? b) Wie ist die Tangentensteigung im angegebenen Bereich? c) Die Bedingung $f''(x) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für bestimmte Punkte des Graphen. d) Was für ein Extrempunkt liegt bei $x = 1$ vor? Überlegen Sie, wie dann der Vorzeichenwechsel der Steigung erfolgt. e) Betrachten Sie den Verlauf des Graphen von f im Intervall $-1 < x < 1$. Wie ist die Steigung (Änderungsrate) in diesem Bereich? f) Wie verhält sich die Steigung (Änderungsrate) an der Stelle $x = 1{,}5$?

Station 2 – Graph mit zwei Wendepunkten

Station 2, Aufgabe 1: Tippkarte 1
Schritt 1: An welchen Stellen hat der gegebene Graph waagerechte Tangenten?
Station 2, Aufgabe 1: Tippkarte 2
Schritt 1: Bei $x_1 = -2$ und $x_3 = 1$ liegt jeweils ein Tiefpunkt, bei $x_2 = -1$ ein Hochpunkt vor. Die Geraden $x = -2$, $x = -1$ und $x = 1$ kennzeichnen die Steigungsbereiche.
Station 2, Aufgabe 1: Tippkarte 3
Schritt 2: Bestimmen Sie das Vorzeichen der Funktionswerte der Ableitungsfunktion f' anhand des Steigungsverhaltens des gegebenen Graphen von f in den einzelnen Bereichen.
Station 2, Aufgabe 1: Tippkarte 4
Schritt 2: In den Intervallen $]-\infty; -2[$ und $]-1; 1[$ fällt der Graph von f. Das bedeutet, dass die Steigung des Graphen von f negativ ist, also $f'(x) < 0$. Damit können die Bereiche oberhalb der x-Achse für diese Intervalle ausgeschlossen und entsprechend gekennzeichnet werden. Der Graph der Ableitungsfunktion f' verläuft unterhalb der x-Achse.
Station 2, Aufgabe 1: Tippkarte 5
Schritt 2: In den Intervallen $]-2; -1[$ und $]1; \infty[$ steigt der Graph von f. Das bedeutet, dass die Steigung des Graphen von f positiv ist, also $f'(x) > 0$. Damit können die Bereiche unterhalb der x-Achse für diese Intervalle ausgeschlossen und entsprechend gekennzeichnet werden. Der Graph der Ableitungsfunktion f' verläuft oberhalb der x-Achse.