Gesunder Schlaf – diskrete und stetige Zufallsgrößen

Mona Hitzenauer

Bild: Stephanie Pratt / Wikimedia Commons / Creative Commons Zero

Und schon wieder klingelt der Wecker viel zu früh. Nur noch einmal umdrehen. Ich schlafe bestimmt nicht mehr ein. Kennen Sie das? Ihre Schüler und Schülerinnen garantiert. In den Materialien setzen sich die Lernenden mit ihrem Schlaf auseinander und nutzen dabei verschiedene Werkzeuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei lernen sie auch, was gesunder Schlaf eigentlich bedeutet. Sie stärken ihre digitalen Kompetenzen mit dem Sammeln und Auswerten eigener Daten, verbessern ihre Teamarbeit und erstellen dynamische Visualisierungen.

Gesunder Schlaf – diskrete und stetige Zufallsgrößen

Oberstufe (erhöhtes Anforderungsniveau)

Mona Hitzenauer

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

diskrete und stetige Zufallsgrößen bzw. Verteilungen zu unterscheiden. Sie lernen die Normalverteilung mit ihren Parametern kennen und untersuchen ihren Graphen mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware. Die Jugendlichen setzen sich mit ihrem eigenen Schlafverhalten auseinander und erkennen die Wichtigkeit von gesundem und ausreichendem Schlaf. In einer Klassenumfrage nutzen sie digitale Werkzeuge zum Sammeln und Auswerten der Daten und stärken ihre digitalen Kompetenzen und Fähigkeit zur Teamarbeit.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **MB** Merkblatt **LEK** Lernerfolgskontrolle

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben Gruppenarbeit

Thema	Material	Methode
Diskrete und stetige Zufallsgrößen	M1	AB, MB
Zufallsgrößen unterscheiden	M2	AB
Normalverteilung	M3	AB
Parameter der Normalverteilung an Dichtefunktion ablesen	M4	AB
Daten sammeln und auswerten	M5	AB
Abschlusstest	M6	AB, LEK

Kompetenzprofil:

Inhalt: diskrete und stetige Zufallsgrößen, Wertemenge, Dichte- und Verteilungsfunktion, Normalverteilung, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Histogramme, Graphen

Medien: z. B. GeoGebra, Excel, digitales Umfragetool

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Ihre Schülerinnen und Schüler kennen diskrete Zufallsgrößen und können deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Tabelle oder Histogramm darstellen. Sie unterscheiden die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße von ihrer kumulativen Verteilungsfunktion. Insbesondere kennen sie die Binomialverteilung und deren Parameter.

Lehrplanbezug

Im LehrplanPLUS des bayerischen Gymnasiums
https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/13/mathematik
(aufgerufen am 15.01.2024)
finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen im erhöhten Anforderungsniveau der 13. Klasse:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen anhand von Beispielen und nutzen zur Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Histogramme sowie die Graphen von Dichtefunktionen und kumulativen Verteilungsfunktionen.
- erläutern die grundlegenden Eigenschaften der Dichtefunktion und der kumulativen Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße sowie den Verlauf der zugehörigen Graphen, z. B. mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware. Sie entnehmen dem Term der Dichtefunktion den Erwartungswert und die Standardabweichung.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Die Materialien bauen aufeinander auf, allerdings können sie auch getrennt voneinander eingesetzt werden.

M1

Die **Aufgaben 1) und 2)** – Begriffe erklären – sind besonders für Lernschwächere konzipiert, damit die Lernenden die Begriffe einüben und scharf voneinander abgrenzen können bzw. sie nicht verwechseln. **Aufgabe 5a)** – Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben – stellt vermutlich für viele Jugendliche eine größere Herausforderung dar, hier können Sie bei lernschwächeren Gruppen im Vorfeld den Tipp geben, dass die Lösung

Aufgaben

1. Recherchieren Sie die Begriffe „abzählbar unendliche Menge“ und „überabzählbar unendliche Menge“ und geben Sie jeweils Beispiele solcher Mengen an.

2. Erklären Sie die Begriffe „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ und „kumulative Verteilungsfunktion“ in Bezug auf eine diskrete Zufallsgröße.

3. Nehmen Sie Stellung zu den Aussagen und korrigieren Sie sie, wenn nötig.
   a) Der Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Stelle x einer diskreten Zufallsgröße X gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X=x)$ an.
   b) Der Wert der Dichtefunktion f an der Stelle x einer stetigen Zufallsgröße X gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X=x)$ an.

4. Durchschnittlich erreichen 40 % aller Menschen die empfohlene Tiefschlafdauer. Es werden 100 Personen im Schlaflabor untersucht. Eine Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Personen, die die empfohlene Tiefschlafdauer aufweisen.
   a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X an.
   b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Histogramm dar.
   c) Geben Sie die Funktion der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
   d) Stellen Sie die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von X graphisch dar.

5. Der Schlaf von 100 Personen wird im Schlaflabor aufgezeichnet. Eine Zufallsgröße Y modelliert die Zeit bis zum ersten Aufwachen innerhalb eines Zeitintervalls von 8 Stunden.
   a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y an.
   b) Die Dichtefunktion von Y lautet $f(x)=\frac{1}{8}$.
   Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion.

6. Beweisen Sie, dass bei einer stetigen Zufallsgröße X für alle x aus ihrer Wertemenge stets $P(X=x)=0$ gilt.

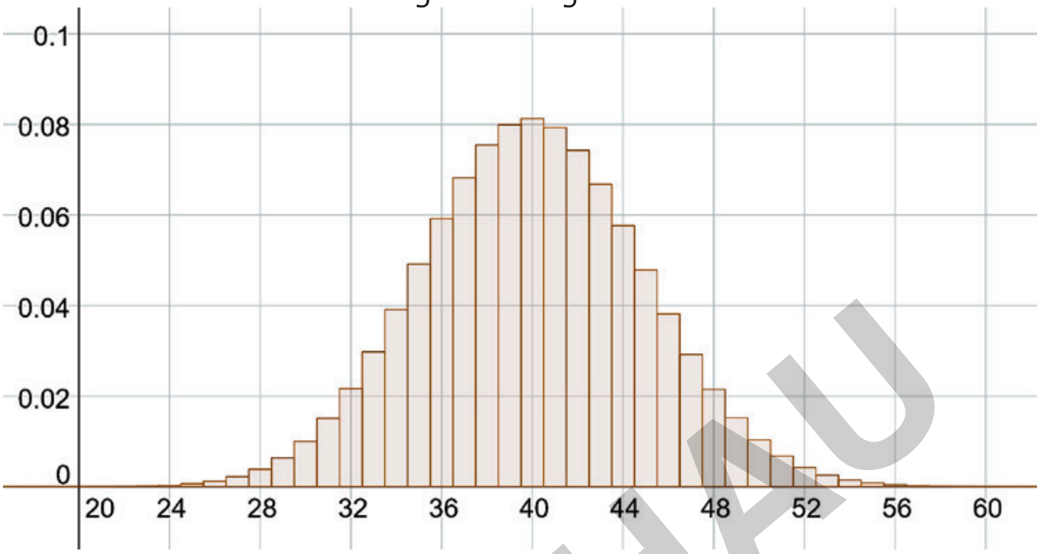
7. X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f(x)$. Das Intervall [a; b] ist in der Wertemenge von X enthalten. Beweisen oder Widerlegen Sie:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f_{n,p}(x) = P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot 0{,}4^x \cdot 0{,}6^{100-x}, \qquad x \in \{0; 1; \ldots; 100\}$$

und ist für alle anderen Werte Null.

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung als Histogramm:

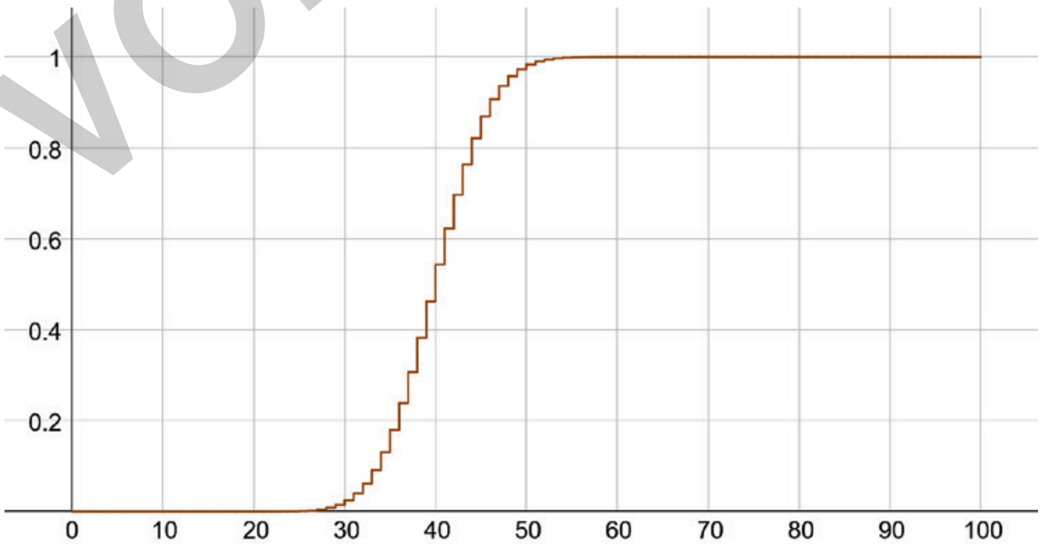


c) Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F_{n,p}(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{100}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{100-k}, \qquad x \in [0; 100]$$

Wobei [x] die Abrundungsfunktion ist, die jedem x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich x ist. Für alle x-Werte außerhalb des Intervalls [0; 100] ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung Null.

d) Graphische Darstellung der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung im Intervall [0; 100]:



Grafiken: Mona Hitzenauer

Anmerkung: Genau genommen dürfte man die einzelnen Treppenstufen nicht mit senkrechten Strichen verbinden, denn jedem x wird genau ein Wert $P(X \leq x)$ zugeordnet und nicht etwa unendlich viele, wie das bei den x-Werten mit den senkrechten Strichen der Fall ist. Die graphische Darstellung wird aber damit anschaulicher.

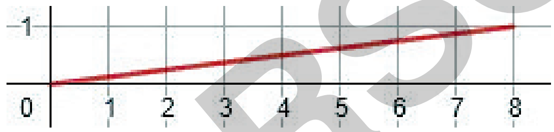
5. Y modelliert die Zeit bis zum ersten Aufwachen innerhalb von acht Stunden.
   a) Y kann Werte im Intervall [0; 8] (Stunden) annehmen. Y ist daher eine stetige Zufallsgröße. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion ist die Nullfunktion, weil für alle x die Wahrscheinlichkeit $P(X = x) = 0$ gilt.

   b) Die Dichtefunktion lautet $f(x) = \frac{1}{8}$. Damit gilt für die Verteilungsfunktion von Y:

   $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{8}\,dx$ und für a = 0 und b = x ist

   $$P(0 \leq X \leq x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{8}\,dt = \left[\frac{1}{8}t\right]_0^x = \frac{1}{8}x$$

   Der Graph der Verteilungsfunktion von Y ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung $\frac{1}{8}$ im Intervall [0; 8]:



Grafik: Mona Hitzenauer

6. Für einen Wert a aus der Wertemenge einer stetigen Zufallsgröße X gilt
   $P(a \leq X \leq a) = P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$.

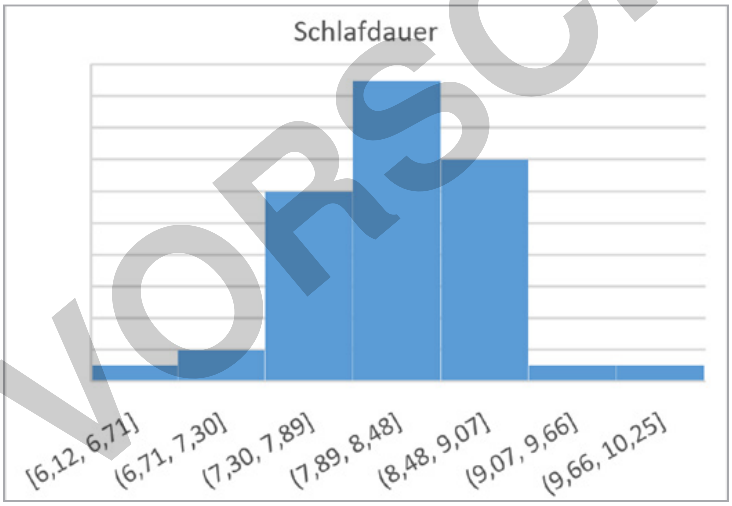
7. $$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a) + P(a < X < b) + P(X = a) \\ &= 0 + P(a < X < b) + 0 \\ &= P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Licht tagsüber und im Gegensatz dazu abends bzw. nachts möglichst wenig Licht sorgt für einen stabilen Rhythmus.[6]
Abendliche Rituale und feste Schlafenszeiten können die Schlafqualität verbessern. Man schläft erholsamer, wenn man sich ausreichend tagsüber bewegt. Auch ein Abendspaziergang kann helfen. Auch späte Mahlzeiten und Koffein haben einen Einfluss auf die Schlafqualität.[7]

M5

1. Die Daten können z. B. in einer geteilten Tabelle (Google Tabellen) oder auch Exceldatei gesammelt werden. Auch per WhatsApp, Signal etc. ist dies möglich, allerdings müssen die Daten dann zur Auswertung noch in ein Tabellenkalkulationsprogramm übertragen werden.

2. Beispielhafte Lösung in Excel mit 50 Datenpunkten:
   a) Histogramm zeichnen:
   Datensatz komplett markieren und dann über
   Einfügen->Diagramme->Histogramm
   ein Histogramm zeichnen lassen.



Grafik: Mona Hitzenauer

(waagerechte Achse: Schlafdauer in Stunden, in sieben Intervalle eingeteilt, senkrechte Achse: Anzahl der Daten in den Intervallen)

---

[6] Münchner Ärztliche Anzeigen, https://www.aerztliche-anzeigen.de/leitartikel/chronobiologie-zurueck-zur-natur (aufgerufen am 15.01.2024)

[7] Techniker Krankenkasse, https://www.tk.de/techniker/magazin/life-balance/besser-schlafen/schlaflose-naechte-sechs-tipps-fuer-einen-erholsamen-schlaf-2125222 (aufgerufen am 15.01.2024)