

Inhaltsverzeichnis

Liebe Lehrerinnen, liebe Lehrer	5
1 Mathematische Begabungen in der Mittelstufe	8
1.1 Was heißt (mathematisch) begabt?	8
1.2 Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen	12
1.3 Kriterien für individuelle Ausprägungen von Mathe-Assen in Klasse 5 bis 8	16
1.3.1 Unterscheidung nach Problemlösestilen	16
1.3.2 Geschlechtsspezifische Besonderheiten	17
1.3.4 Unterscheidung nach besonderen kognitiven und physiologischen Konstellationen	18
1.3.4 Klassifikation nach Sozialkompetenzen	21
2 Mathe-Asse im Übergang von der Grundschule in die Mittelstufe	22
3 Mathe-Asse im Regelunterricht erkennen und erfassen	27
3.1 Beobachtungen beim Problemlösen	28
3.2 Einsatz von Indikatoraufgaben	29
3.3 Schülerbefragungen	31
3.4 Selbstreflexionen	33
4 Mathe-Asse im Regelunterricht individuell fördern	35
4.1 Zwei Differenzierungsformen für den Mathematikunterricht im Vergleich	35
4.2 Binnendifferenzierung versus natürliche Differenzierung	38
4.3 Beispiel: Das Zahlenteilerspiel	41
5 Glossar	47
6 Literaturverzeichnis	52
7 Anhang	
Handreichung zum Beobachtungsprotokoll: Bist du ein Mathe-Ass?	54
Beobachtungsprotokoll: Bist du ein Mathe-Ass?	55
Indikatoraufgabentest	58
Anleitung (Teil 1)	59
Bist du ein Mathe-Ass? (Teil 1)	61
Lösungshinweise (Teil 1)	66
Ausgewählte Schülerlösungen (Teil 1)	68

Anleitung (Teil 2)	70
Bist du ein Mathe-Ass? (Teil 2)	72
Lösungshinweise (Teil 2).....	77
Ausgewählte Schülerlösungen (Teil 2)	78
Bewertungsbogen	80
Schülerergebnisbogen	83
Punktezuordnung zu den mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen.....	85
Leitfragen: Bist du ein Mathe-Ass?.....	86
Schülerreflexionsbogen.....	87
Mathe-Asse-Checkliste	88



GEFÖRDERT VOM



Dieses Buch wurde vom BMBF-geförderten Forschungsverbund „Leistung macht Schule“ (LemaS) im Rahmen des gleichnamigen Projekts der gemeinsamen Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler entwickelt. Es soll Lehrerinnen und Lehrer beim Fördern von Potenzialen und Leistungsstärken im regulären Mathematikunterricht unterstützen.

VORSCHAU

7 Anhang

Handreichung zum Beobachtungsprotokoll: Bist du ein Mathe-Ass?

Mit dem Beobachtungsprotokoll können die Ergebnisse zielgerichteter Beobachtungen von Schülerinnen und Schülern beim Lösen anspruchsvoller Problemaufgaben dokumentiert werden. Um allen Lehrkräften ein schnelles Ausfüllen des Protokolls zu ermöglichen, sind viele Antworten als Auswahlantworten vorgegeben, sodass nur noch das jeweils Entsprechende anzukreuzen ist. Hierdurch ist zugleich ein relativ objektiver Vergleich von Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler beim Problembearbeiten möglich.

Struktur des Beobachtungsprotokolls:

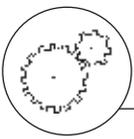
Die einleitenden Angaben beziehen sich auf allgemeine Aspekte. Die nachfolgenden Angaben dienen dem Erfassen der Aktivitäten einer Schülerin oder eines Schülers beim Bearbeiten einer Aufgabe. Der Hauptfokus ist dabei auf die „Forscherphase“ gerichtet, also auf den Prozess des selbstständigen Erfassens der Problemaufgabe, des Findens, Darstellens und Überprüfens einer Lösung bzw. der Lösungen. Im Sinne eines umfassenden Kennzeichnens des Problemlöseprozesses sollten abschließend auch die Aktivitäten der Schülerin bzw. des Schülers in der Auswertungsphase sowie ihre bzw. seine schriftlichen Aufzeichnungen zur Aufgabenlösung einbezogen werden.

Für eine vertiefende Analyse bietet es sich an, zusätzlich die zu lösende Problemaufgabe bezüglich ihrer inhaltlichen Schwerpunkte, der Repräsentationsform und der zu leistenden Anforderungen zu kennzeichnen.



Empfehlungen und Hinweise:

- Verschaffen Sie sich vorab Klarheit über die inhaltlichen Bedeutungen der mathematikspezifischen Begabungsmerkmale, die begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften und die verschiedenen Problemlösestile (siehe Kapitel 1.3).
- Stimmen Sie sich hinsichtlich der qualitativen Einschätzungen vorbereitend mit dem Fachkollegium ab, um möglichst objektive Bewertungen vornehmen zu können.
- Sammeln Sie die Protokolle zu jeder Schülerin und jedem Schüler, um Entwicklungen über einen bestimmten Zeitraum und gegebenenfalls verallgemeinerbare Einschätzungen vornehmen zu können. Beachten Sie, dass Sie jeweils nur ein oder zwei Schülerinnen oder Schüler in einer Unterrichtsstunde gezielt beobachten können und deshalb einen solchen Plan aufstellen, der gewährleistet, dass Sie im Verlauf eines Schuljahres zu möglichst allen Schülern in ausgewogenem Umfang Beobachtungsprotokolle anfertigen.
- Sammeln Sie die Protokolle für eine systematische Dokumentation.



Beobachtungsprotokoll: Bist du ein Mathe-Ass?

Name: _____ Datum: _____

Thema der Forscherstunde/Problemaufgabe:

Bearbeitungszeit: _____ Minuten

1. Mathematikspezifische Begabungsmerkmale

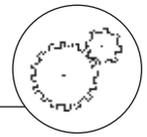
	<i>sehr gut</i>	<i>gut</i>	<i>schwankend</i>	<i>gering</i>
Kompetenzen im Speichern mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen				
Kompetenzen im Strukturieren auf der Musterebene				
Kompetenzen im selbstständigen Angeben von Strukturen				
Kompetenzen im logischen Schlussfolgern				
Kompetenzen im selbstständigen Wechseln der Repräsentationsebenen				
Kompetenzen im selbstständigen Umkehren von Gedankengängen				
Besondere mathematische Sensibilität				
Besondere mathematische Fantasie				

2. Begabungstützende Persönlichkeitseigenschaften

	<i>sehr gut</i>	<i>gut</i>	<i>schwankend</i>	<i>gering</i>
Hohe geistige Aktivität				
Intellektuelle Neugier				
Anstrengungsbereitschaft				
Freude am Problemlösen				
Konzentrationsfähigkeit				
Selbstständigkeit				

3. Bevorzugte soziale Lernform

(Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit)



4. Lösungsqualität

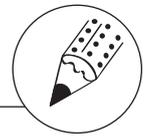
(zum Beispiel originelle Lösungsideen, korrekte und/oder vollständige Lösungsdarstellung, selbstständiges Finden interessanter Anschlussprobleme)

5. Bevorzugter Problembearbeitungsstil

- intuitives Vortasten
- systemhaftes Vorgehen
- abwechselndes Überlegen und Probieren – Suchen nach Lösungsmustern

6. Indizien für intuitives Problemlösen

(zum Beispiel plötzliche Ideen [„Ich kann es nicht erklären. Die Zahl war auf einmal da!“], sprunghafte Gedankenführung, scheinbar zusammenhanglose Wortfetzen, die aber beim genauen Analysieren doch wichtig für die Lösung sind, symbolhafte Gesten, die Wesentliches „erahnend“, mit Worten (noch) nicht fassbar ausdrücken)



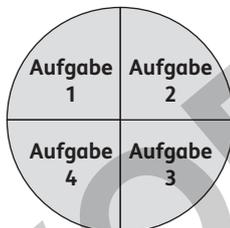
Indikatoraufgabentest

Der Indikatoraufgabentest dient als integrierter Bestandteil einer prozessorientierten Erfassung von mathematisch begabten Kindern der 5. bis 8. Klasse. Theoretische Basis sind das von Käpnick und Fuchs konzipierte Modell der Entwicklung mathematischer Begabungen im 3. und 4. Schuljahr (vgl. Käpnick, Fritzlar, Rodeck 2006, S. 6) sowie die Untersuchungen von Sjuts bezüglich der Schuljahre 5 und 6 (2017). Die Ergebnisse des Indikatoraufgabentest können eine diagnostische Einschätzung der Leistungspotenziale von Schülerinnen und Schülern bezüglich der mathematikspezifischen Begabungsmerkmale ermöglichen. Sie sollten jedoch stets unter einer ganzheitlichen Sicht auf die gesamte Leistungs- und Persönlichkeitsentwicklung eines Kindes wie auch im Zusammenhang mit den Ergebnissen weiterer Diagnoseverfahren gesehen werden.

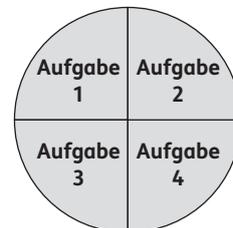
Bei der Durchführung sind ein paar Dinge zu beachten:

- Indikatoraufgabentest einzeln oder in Gruppen
- maximal 20 bis 25 Schülerinnen und Schüler bei einem „Gruppentest“
- übersichtliche Sitzordnung, um einem Abschreiben vorzubeugen
- pro Kind ein Tisch mit Sicht auf die Lehrkraft
- ruhige Atmosphäre für ein ungestörtes Arbeiten
- wenn möglich, eine zweite Person als Aufsichtshilfe dazuholen

Die Anweisungen sollen wörtlich den nachfolgenden sprachlichen Instruktionen entsprechen. Die Lehrperson sollte die Anleitung daher vorab studieren und einüben. Mit den Schülerinnen und Schülern darf aber keine Vorübung erfolgen. Auch die für einzelne Aufgaben vorgesehenen Beispiele zur Erläuterung dürfen nur während des Tests, nicht aber vorher, durchgeführt werden.



Unterrichtsstunde 1: Indikatoraufgabentest, Teil 1



Unterrichtsstunde 2: Indikatoraufgabentest, Teil 2

Der Indikatoraufgabentest umfasst zwei Teile mit je vier Aufgaben, die jeweils in einer Unterrichtsstunde eingesetzt werden können. Es ist aber in Abhängigkeit von den Intentionen und Gegebenheiten möglich, den Einsatz der Aufgaben noch weiter aufzusplitten. Um die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern und der Gefahr von Frusterlebnissen zu entgehen, sollten die Aufgaben frühestens am Ende der 5. Klasse bzw. nur bei potenziell Hochbegabten eingesetzt werden.



Zur Information:

Indikatoraufgaben dienen dem Erkennen mathematikspezifischer Begabungskriterien. Es sind größtenteils offene und komplexe Problemaufgaben, mit denen mathematisch-produktive Lerntätigkeiten initiiert werden, und die ein quantitatives Erfassen und Auswerten von Leistungen ermöglichen. Indikatoraufgaben sind halbstandardisiert, weil folgende Gütekriterien gewährleistet sind: die *Objektivität* bezüglich der Durchführung, Auswertung und zum Teil Interpretation der Ergebnisse; die inhaltliche *Validität* (Gültigkeit bzw. Eignung bezüglich der Zielsetzung) sowie zum Teil die *Reliabilität* (Zuverlässigkeit), welche jedoch nicht statistisch geprüft bzw. abgesichert sind. Indikatoraufgaben stellen somit



Anleitung (Teil 1)

Der erste Teil des Indikatoraufgabentests dient dem Erfassen folgender mathematikspezifischer Begabungsmerkmale:

Indikatoraufgabe	Mathematikspezifische Begabungsmerkmale
1	Fähigkeit zum Speichern visuell gegebener mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen
2	Fähigkeit im Strukturieren auf der Musterebene, im Angeben von Strukturen und im Wechseln der Repräsentationsebenen
3	Fähigkeit im Strukturieren auf der Musterebene, im Angeben von Strukturen sowie mathematischer Kreativität
4	Fähigkeit im Umkehren von Gedankengängen, im Strukturieren mathematischer Sachverhalte, im Wechseln der Repräsentationsebenen

Damit ein objektiver Ergebnisvergleich zwischen erhaltenen Testresultaten möglich ist, sollten auch jeweils gleiche Aufgabenbedingungen und eine einheitliche Punktbewertung gewährleistet werden.

Arbeitsmaterial für die Lehrkraft:

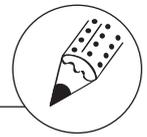
- eine Testanleitung
- alle sieben Aufgabenblätter mit den entsprechenden sprachlichen Instruktionen
- ein Bleistift, Ersatzbleistifte für die Kinder
- eine Uhr mit Sekundenzeiger (Stoppuhr)

Arbeitsmaterial für jede Schülerin und jeden Schüler:

- sieben Aufgabenblätter (in einer Mappe)
- ein Bleistift
- ein Radiergummi

Beim Erläutern von Beispielen sollte die Lehrperson – falls notwendig – den Kindern helfen, eine richtige Lösung zu finden. Auf keinen Fall darf sie aber bei den eigentlichen Indikatoraufgaben irgendeine Hilfe oder einen Hinweis zur Lösung geben, auch nicht durch Mimik oder Gestik. Für die Bearbeitungsdauer einer Indikatoraufgabe gilt die vorgegebene Regelzeit. Darunter ist die Bearbeitungszeit für jede Aufgabe zu verstehen, und zwar ab der Anweisung „Fangt an!“ oder „Jetzt!“ bis zur Anweisung „Beendet eure Arbeit!“ oder „Schluss!“.

Teil 1 Gesamtzeit etwa 30 Minuten	Aufgabe 1	2 Minuten
	Aufgabe 2	10 Minuten
	Aufgabe 3	10 Minuten
	Aufgabe 4	8 Minuten



Sprachliche Instruktionen

Einleitung	<p>Wenn jedes Kind einen Bleistift bereitgelegt hat, sagt die Lehrkraft: „Heute soll jeder von euch versuchen, selbstständig Aufgaben zu lösen. Es sind Aufgaben, die ihr vorher nicht eingeübt habt. Dennoch braucht ihr keine Angst haben. Ich bin sicher, dass jeder von euch viele Aufgaben lösen kann. Und wenn ihr mal eine Aufgabe nicht schafft, ist das auch nicht schlimm.“</p> <p>Wir werden so vorgehen, dass ich euch zuerst jede Aufgabe kurz erkläre. Da müsst ihr gut zuhören. Wenn ich dann ‚Fangt an!‘ oder ‚Jetzt!‘ sage, beginnt ihr mit dem Lösen der Aufgabe. Sage ich dann ‚Schluss!‘ oder ‚Beendet eure Arbeit!‘, müsst ihr aufhören und den Bleistift hinlegen. Die Aufgaben- und Lösungsblätter liegen in einer Mappe. Ihr nehmt sie erst dann heraus, wenn ich es euch sage.“</p> <p>Dann werden die Mappen mit den Aufgabenblättern (inklusive Deckblatt) ausgeteilt. Die Mappen müssen zugeklappt sein. Die Aufgabenblätter sind der Reihenfolge nach so in der Mappe geordnet, dass die beschriftete Seite jeweils unten liegt.</p> <p>Als Erstes nehmen die Kinder das oberste Blatt bzw. das Deckblatt heraus und schlagen die Mappe wieder zu. Nachdem sie ihre Personalien eingetragen haben, sagt die Lehrperson: „Wir wollen nun beginnen.“</p>					
Aufgabe 1	<p>„Wir beginnen mit der ersten Aufgabe. Hört gut zu! Ihr werdet gleich eine Zeichnung mit Zahlen sehen. Versucht, euch genau einzuprägen, welche Zahlen auf dem Bild zu sehen sind und an welcher Stelle sie stehen. Ihr habt hierfür 40 Sekunden Zeit. Anschließend werdet ihr auf dem nachfolgenden Bild die Zeichnung nochmals sehen. Aber nun fehlen die Zahlen. – Ihr müsst dann die Zahlen an der richtigen Stelle wieder eintragen. Wenn ich also ‚Jetzt!‘ sage, nehmt das nächste Blatt aus der Mappe. Jetzt!“</p> <p>Nach 40 Sekunden: „Schluss! Legt das Blatt unter die Mappe und holt das oberste Blatt aus der Mappe heraus. Tragt nun die Zahlen richtig ein!“</p> <p>Nach etwa einer Minute: „Schluss! Dreht das Blatt bitte um. Wenn ihr wollt, könnt ihr eine Notiz auf der Rückseite des Blattes machen und schreiben, wie ihr euch die Zahlen gemerkt habt. Danach legt ihr das Blatt unter die Mappe.“</p>					
Aufgabe 2	<p>„Nehmt nun das nächste Blatt von oben aus der Mappe.“ Dann liest die Lehrperson alle Aufgabentexte des Blattes vor. Nach dem Vorlesen der Teilaufgabe 2b erklärt die Lehrkraft: „Mit der n-ten Figur ist gemeint, dass n als Platzhalter für eine beliebige Nummer steht.“</p> <p>Mit der Aufforderung „Fangt an! Ihr habt hierfür insgesamt 10 Minuten Zeit“ beginnen die Schülerinnen und Schüler, die Aufgabe 2 zu lösen. Nach 10 Minuten erfolgt die Instruktion „Schluss! Legt das Blatt unter die Mappe.“</p>					
Aufgabe 3	<p>„Das habt ihr bisher gut gemacht. Wir kommen nun zur nächsten Aufgabe. Nehmt dazu die beiden obersten Blätter aus der Mappe.“ Dann liest die Lehrkraft den Aufgabentext vor.</p> <p>„Bitte schreibt die Lösungen der Beispielaufgabe, die nun an der Tafel angeschrieben werden, mit.“ Anschließend wird die Beispielaufgabe wie folgt gemeinsam an der Tafel gelöst.</p> <div data-bbox="501 1375 1106 1765" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">2 4 8 16 32</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">1. Zahlenmuster:</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2 4 8 16 32 64 128 256 (immer $\cdot 2$)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2. Zahlenmuster:</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\begin{array}{ccccccc} & +6 & & +6 & & +6 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 14 & 28 & 20 & 40 \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \\ & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 \end{array}$ </td> </tr> </table> </div> <p>„Jetzt versucht, zu den anderen vorgegebenen Zahlenfolgen in den Teilaufgaben a) und b) immer jeweils zwei sinnvolle und interessante Fortsetzungen anzugeben. Beschreibt auch immer in Stichworten oder durch Pfeile euer Rechenmuster. Ihr habt hierfür insgesamt 8 Minuten Zeit.“</p> <p>Nach 8 Minuten: „Schluss! Legt die beiden Blätter unter die Mappe.“</p>	2 4 8 16 32	1. Zahlenmuster:	2 4 8 16 32 64 128 256 (immer $\cdot 2$)	2. Zahlenmuster:	$ \begin{array}{ccccccc} & +6 & & +6 & & +6 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 14 & 28 & 20 & 40 \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \\ & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 \end{array} $
2 4 8 16 32						
1. Zahlenmuster:						
2 4 8 16 32 64 128 256 (immer $\cdot 2$)						
2. Zahlenmuster:						
$ \begin{array}{ccccccc} & +6 & & +6 & & +6 & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 14 & 28 & 20 & 40 \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \\ & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 \end{array} $						
Aufgabe 4	<p>„Jetzt kommen wir zur letzten Aufgabe. Ihr habt bisher so fleißig gearbeitet, nun bin ich auch überzeugt, dass ihr die Aufgabe auch noch schafft. Nehmt hierzu das letzte Blatt aus der Mappe!“</p> <p>Die Lehrperson liest den Aufgabentext vor. Dann erfolgt die Aufforderung „Fangt an. Ihr habt 8 Minuten Zeit. Denkt auch daran, eure Rechenwege oder Begründungen aufzuschreiben.“</p> <p>Nach 8 Minuten: „Schluss! Ihr habt es geschafft! Legt jetzt bitte alle Blätter unter die Mappe.“</p>					

Indikatoraufgabe 1



1	14	15	4
13	2	3	16
12	7	6	9
8	11	10	5

Seite 2

© AOL-Verlag

Indikatoraufgabe 1



Seite 3

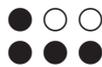
L-Verlag



Indikatoraufgabe 2

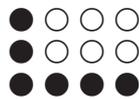
Anne legt aus kleinen schwarzen und weißen Plättchen Rechtecksanordnungen. Dabei vergrößert sie ihre Rechtecksanordnungen nach einer bestimmten Regel und schreibt darunter jeweils die Gesamtzahl der Plättchen einer Figur.

1. Figur



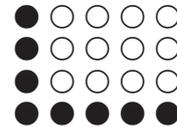
6

2. Figur



12

3. Figur



20



- a) Aus wie vielen schwarzen und wie vielen weißen Plättchen besteht Annes 4. Figur?

Anzahl der schwarzen Plättchen: _____

Anzahl der weißen Plättchen: _____



- b) Gib an, wie man die **Anzahl** der weißen und schwarzen Plättchen in einer beliebigen Figur bestimmen kann. Du kannst jeweils eine Regel für die schrittweise Vergrößerung oder eine Formel für die n-te Figur angeben.



- c) Tim hat eine solche Rechtecksanordnung mit insgesamt 72 kleinen Plättchen gelegt. Die wievielte Figur ist diese in Annes Figurenfolge? Begründe.



Indikatoraufgabe 3

In dieser Aufgabe geht es um das Fortsetzen von Zahlenfolgen. Es sind jeweils die ersten Zahlen einer Zahlenfolge gegeben. Versuche, Rechenmuster in diesen Zahlenanordnungen zu entdecken.

Füge dann immer 4 weitere Zahlen hinzu, die zu den vorgegebenen Mustern passen! Gib für jede Zahlenfolge 2 verschiedene sinnvolle Fortsetzungen mit jeweils deutlich unterschiedlichen Zahlenmustern an.

Beschreibe die Rechenmuster zum Beispiel mit Pfeilen oder Worten.

Beispielaufgabe:

2 4 8 16



1. Zahlenmuster:

2 4 8 16

2. Zahlenmuster:

2 4 8 16



a) 3 9 6 18 12

1. Zahlenmuster:

3 9 6 18 12

2. Zahlenmuster:

3 9 6 18 12