KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	4–5
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, Datenauswertung
Materialart:	Definition, Excel, Informationstext
Inhalt:	Erwartungswert, Zufallsgröße, Kombinationen, Variationen, Binomialverteilung

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden haben schon die Grundlagen der Stochastik kennengelernt. Sie können Begriffe wie Zufall, Ereignisse, Erwartungswert, Kombinationen und Variationen den gestellten Aufgaben zuordnen und damit umgehen. Sie können die bereits erworbenen Kenntnisse beim Entwurf und der Beurteilung der Lotterie-Ideen einsetzen und das Wissen so vertiefen.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Die Kombinatorik bietet Möglichkeiten, Zufallsexperimente mathematisch zu beschreiben. Lotterien sind Zufallsexperimente, wobei mit dem Eintritt eines „gewünschten" Ereignisses ein Gewinn von Geld oder Sachwerten verbunden ist. Dadurch, dass der Spieleinsatz größer ist als die ausgezahlten Gewinne, erhält der Lotteriebetreiber einen Überschuss. Der Reiz einer Lotterie besteht in den meist sehr hohen Gewinnen, mit denen die Lotterie beworben wird. Die für die hohen Gewinne notwendige sehr geringe Gewinnwahrscheinlichkeit wird dabei gerne nur am Rand erwähnt.

In dieser Ausgabe der Unterrichtsmaterialien Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden mehrere Grundideen für einfache Lotterien vorgestellt. Anhand der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten sollen die Schülerinnen und Schüler die Lotterien mit den bereits erlernten Gesetzen der Kombinatorik mathematisch beschreiben. Mit den Erkenntnissen können dann, aus Sicht der Lotteriebetreiber, die Höhe der Gewinne festgelegt werden, sodass ein akzeptabler Lotterieüberschuss übrigbleibt.

In diesem Beitrag wird die Lotterie immer aus der Sicht der Spielenden betrachtet. Positive Werte, z. B. der Erwartungswert, sind Gewinne für die Spielenden und ein Verlust für den Lotteriebetreiber. Negativ bedeutet dann einen Verlust für die Spielenden und einen Ertrag für den Lotteriebetreiber.
Als Lotteriebetreiber ist man also nach dieser Definition an einem möglichst negativen Lotterieausgang interessiert.

Auf einen Blick

Lotterien, Glücksspiel für einen guten Zweck

M 1	Erwartungswert, Kombinatorik, Binomialverteilung
M 2	Würfelspiel
M 3	Vereinfachtes Roulette-Spiel
M 4	Lotto-Spiel
M 5	Fakultät-Funktion und Stirling-Formel

M 1 Erwartungswert, Kombinatorik, Binomialverteilung

Auf dem Schulfest kurz vor den Sommerferien sollen Sie Geld für den Förderverein sammeln. Anstatt nur Spendendosen aufzustellen, sollen Sie das Geld durch eine Lotterie einspielen[1]. Sie können sich nun einige eigene Lotterien ausdenken, diese mit den Gesetzmäßigkeiten aus der Stochastik mathematisch beschreiben und miteinander vergleichen. Sie müssen Überlegungen zur Attraktivität der Lotterien treffen und auch jeweils bedenken, dass die Lotterie im schlechtesten Fall gar keinen Überschuss, sondern einen Verlust einspielen kann. Nachfolgend sollen einige wichtige Gesetze der Stochastik genannt werden und damit einige Beispiele für Lotterien berechnet werden.

Erwartungswert

Die wichtigste Größe ist der Erwartungswert. Wenn Sie sehr viele einzelne Spiele bzw. Wetten durchführen, wird Ihr Lotterie-Überschuss bzw. Verlust ungefähr dem Erwartungswert entsprechen. Diesen berechnen Sie aus den Wahrscheinlichkeiten der möglichen Gewinne/Verluste eines einzelnen Spiels.

X ist die Zufallsgröße, hier der Gewinn, bzw. Verlust eines einzelnen Spiels.

X kann die Werte aus der Menge $S=\{x_1; x_2; x_3; \ldots ; x_n\}$ annehmen.

x_i ist ein möglicher Wert aus n verschiedenen Werten.

$P(X=x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße den Wert $X=x_i$ annimmt.

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X ist ein mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteter Mittelwert der möglichen Werte der Zufallsgröße:

$$\mu(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i)=x_1 \cdot P(X=x_1)+x_2 \cdot P(X=x_2)+\ldots+x_n \cdot P(X=x_n)$$

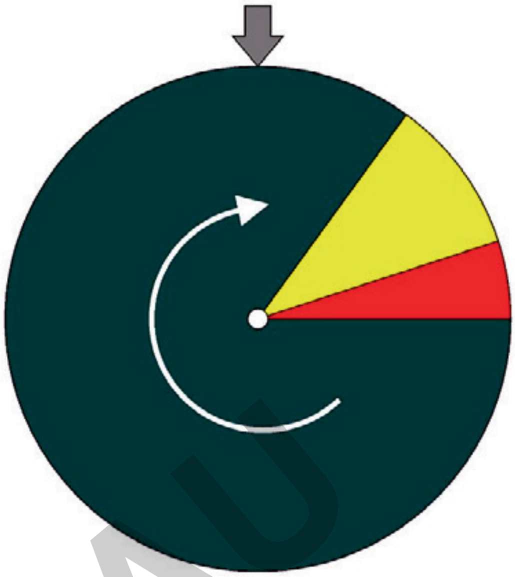
Zur besseren Übersicht ist es manchmal sinnvoll, eine Tabelle anzulegen

i	1	2	...	n	Summe Σ
x_i					
$P(X=x_i)$					1
$x_i \cdot P(X=x_i)$					μ

1 Die Durchführung einer Lotterie muss der Förderverein ggf. gegenüber dem Ordnungsamt oder dem Finanzamt anmelden, in bestimmten Fällen auch genehmigen lassen.

Beispiel:

Sie haben ein Glücksrad mit drei Sektoren, also n = 3. Beim kleinsten gibt es einen Gewinn, beim etwas größeren einen Trostpreis und beim restlichen Sektor, dem größten, gewinnt man nicht. Die Gewinnauszahlung ist die Zufallsgröße X, sie kann die Werte $x_1 = 0$ (größter Sektor), $x_2 = 1\,€$ (Trostpreis) oder $x_3 = 10\,€$ (Gewinn) annehmen. Wenn der Sektor für 10 € auf dem Glücksrad z. B. einen Winkel von 18° umfasst, der Sektor für 1 € 36°, dann sind die Wahrscheinlichkeiten der Gewinne:



Grafik: Dr. Jürgen Franke

P(X = 10 €) = 18°/360° = 0,05 und

P(X = 1 €)=36°/360° = 0,1

die Wahrscheinlichkeit nicht zu gewinnen ist folglich P(X = 0) = 0,85.

i	1	2	3	Σ
x_i	0	1 €	10 €	
$P(X = x_i)$	0,85	0,1	0,05	1
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0	0,1 €	0,5 €	0,6 €

Der Erwartungswert für ein Spiel an diesem Glücksrad ist dann

$\mu(X) = 10€ \cdot 0{,}05 + 1€ \cdot 0{,}1 + 0 = 0{,}6€$

Wenn Sie hier als Lotteriebetreiber einen Überschuss behalten wollen, müssen Sie mehr als den Erwartungswert $\mu(X) = 0{,}6\,€$ als Spieleinsatz fordern. Sie können auch den Erwartungswert $\mu(X)$ festlegen und die Gewinnauszahlungen und den Spieleinsatz entsprechend anpassen.

Kombinatorik

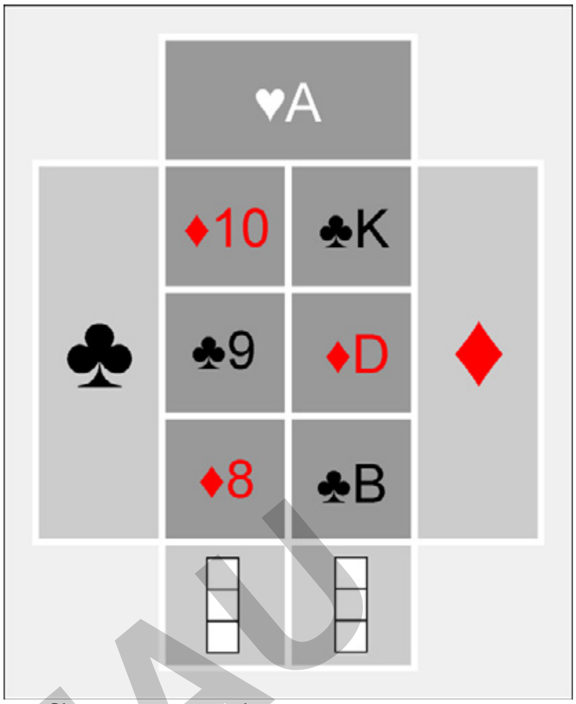
Die Kombinatorik beschreibt Urnenexperimente, bei denen aus einem Bestand von n unterschiedlichen Kugeln in der Urne k Kugeln gezogen werden. Es interessiert nun die Anzahl Z an Variationen, bzw. Kombinationen, die dafür möglich sind. Versuchen Sie, Ihr Lotterie-Spiel mit einem Urnenexperiment zu beschreiben. So können Sie diese Gesetzmäßigkeiten verwenden, um die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Lotterie-Ergebnis zu bestimmen.
Für die nachfolgend beschriebenen Lotterien benötigen Sie:

Anzahl Z der Variationen für k mal ziehen **mit Zurücklegen mit** Beachtung der **Reihenfolge**:
$Z = n^k$

Beispiel:
Es werden eine 1-Cent, 5-Cent, 10 Cent und 50 Cent-Münze geworfen. Alle Münzen, die auf „Zahl" fallen, werden entsprechend ihrem Nennwert gezählt, die anderen mit Null. Bei vier verschiedenen, bzw. in festgelegter Reihenfolge, geworfenen Münzen hat man
$Z = 2^4 = 16$
Variationen, die Sie nach der o. g. Summe benennen können. Das entspricht einem Urnenexperiment mit zwei Kugeln, bei dem Sie 4-mal hintereinander unter Beachtung der Reihenfolge eine Kugel ziehen und wieder zurücklegen.

Variation Nr.					Summe „Zahl"
1	Wappen	Wappen	Wappen	Wappen	0
2	Wappen	Wappen	Wappen	Zahl	50
3	Wappen	Wappen	Zahl	Wappen	10
4	Wappen	Wappen	Zahl	Zahl	60
5	Wappen	Zahl	Wappen	Wappen	5
6	Wappen	Zahl	Wappen	Zahl	55
7	Wappen	Zahl	Zahl	Wappen	15
8	Wappen	Zahl	Zahl	Zahl	65
9	Zahl	Wappen	Wappen	Wappen	1
10	Zahl	Wappen	Wappen	Zahl	51
11	Zahl	Wappen	Zahl	Wappen	11

Ihr Roulette-Spielfeld beim Schulfest hat nun aber nur sieben „Zahlen“-Felder. Diese sind mit den Symbolen eines Skat-Spiels gekennzeichnet und zur Auslosung können Sie genau diese sieben Karten aus einem Skat-Spiel verwenden. Es gibt drei rote und drei schwarze Felder und das Herz-Ass übernimmt die Rolle der „Null“. Erlaubt sind die in der nachfolgenden Tabelle aufgeführten Wetten.



Grafik:Dr. Jürgen Franke

Aufgabe 1

Tragen Sie in die Tabelle die Gewinnwahrscheinlichkeiten jeder Wette ein. Legen Sie ein ganzzahliges Vielfaches des Einsatzes für jede Wette als Auszahlung fest. Berechnen Sie die Auszahlung mal der Wahrscheinlichkeit für die Auszahlung. Wenn Sie entsprechend der Spielregeln des „richtigen“ Roulettes vorgehen, steht in der letzten Spalte immer der gleiche Wert. Berechnen Sie damit den Erwartungswert eines Mini-Roulette-Spiels.

	Anzahl	Wahrsch.	Auszahlung	Auszahlung mal Wahrsch.
Wette	n	p	A=	H=
1 Feld	1			
2 Felder horizontal	2			
2 Felder vertikal	2			
3 Felder vertikal	3			
Kreuz	3			
Karo	3			